УДК 334.012.4

І. І. Дрінь, к.ф.-м.н., доцент,
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ,
м. Чернівці
С. С. Дрінь, к.ф.-м.н.,
Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
м. Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО ПРОЦЕСУ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Анотація

Розкрита сутність динамічної економічної поведінки конкуруючих економічних об'єктів, яка моделюється нелокальною задачею для систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Розроблено динамічну математичну модель у припущенні, що загальний обсяг виробництва визначається такими факторами: кількістю виробленої продукції кожною стороною, зміною певного обладнання, що призводить до зміни обсягу виробництва, ступенем недовіри конкурентів, а також вважаючи, що темпи зміни обсягів виробництва пропорційно залежать від цих факторів. Частинним випадком такої моделі є модель гонки озброєнь. Економічне тлумачення нелокальної умови полягає в тому, що обсяги виробництва в різні моменти часу регулюються цією наперед заданою умовою. Математична модель призначена для дослідження динаміки економічного процесу з регулюванням обсягів виробництва у різні моменти часу.

Ключові слова: модель, динаміка, конкуруючі економічні об'єкти, обсяг виробництва, нелокальна умова регулювання.

И. И. Дринь, к.ф.-м.н., доцент,
Черновицкий торгово-экономический институт КНТЭУ,
г. Черновцы
С. С. Дринь, к.ф.-м.н.,
Национальный университет «Киево-Могилянская академия»,
г. Киев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация

Раскрыта сущность динамического экономического поведения конкурирующих экономических объектов, моделирующаяся нелокальной задачей для систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Разработана динамическая математическая модель в допущении, что общий объем производства определяется такими факторами: количеством изготовленной продукции каждой стороной, сменой определенного оборудования, которое ведет к изменению объема производства, степенью недоверия конкурентов, а также считая, что темпы изменения объемов производства пропорционально зависят от этих факторов.

Частичным случаем такой модели является модель гонки вооружений. Экономическая интерпретация нелокального условия состоит в том, что объемы производства в разные моменты времени регулируются этим заранее заданным условием. Математическая модель предназначена для исследования динамики экономического процесса с регулированием объемов производства в разные моменты времени.

Ключевые слова: модель, динамика, конкурирующие экономические объекты, объем производства, нелокальное условие регулирования.

Постановка проблеми. Економічна діяльність людського суспільства була і залишається у центрі уваги багатьох досліджень. Основним принципом економічної діяльності є максимум ефективності при мінімумі затрат ресурсів. Для досягнення треба застосовувати математичне моделювання при обробці обширних баз даних, при оперативній оцінці ситуації, при прогнозуванні діяльності фірми. Окрему математичну модель можна подати внутрішньо несуперечливою замкнутою системою математичних співвідношень, призначену для відтворення певної якості досліджуваного реального явища чи процесу. Зауважимо також, що необхідність дослідження актуальних економічних проблеми призводить до розвитку математичного апарату. Зокрема, поява класу продуктивних матриць в лінійній алгебрі зумовлена дослідженням міжгалузевого балансу, а математичне програмування виникло при дослідженні оптимального плану розподілу обмежених ресурсів. Проблема кількісного вираження економічних факторів і аналіз емпіричних даних сприяла зародженню теорії економічних індексів та економетрики, проблема опису оптимальної поведінки економічних агентів – теорії виробничих функцій і теорії споживання, проблема опису узгодженої дії незалежних економічних агентів, раціонального використання ресурсів і справедливого розподілу прибутків у суспільстві – теорії загальної економічної рівноваги і суспільного благополуччя, проблема механізмів розширеного виробничого відтворення – теорії оптимального економічного зростання.

Аналіз основних досліджень і публікації. Сучасна економічна наука містить багато праць зарубіжних і вітчизняних учених, присвячених проблемам моделювання економіки та її сталого розвитку. Математичне моделювання економіки – це галузь наукового пошуку, що передбачає опис економічних явищ і процесів за допомогою математичних моделей, їх розвитку, аналіз та адаптацію до реалізації засобами сучасних спеціалізованих прикладних програм [1; 2]. Економіко-математичні методи – це сукупність спеціальних прикладних математичних методів, що використовують дослідники для побудови математичних моделей реальних економічних процесів та для їхньої оцінки [3-6]. Теоретичні моделі відображають загальні властивості економіки та її компонентів з дедукцією висновків і формальних передумов, використовуються для прогнозування динаміки явищ [7]. Говорячи про застосування математики в економіці, слід зауважити, що ще в 1494 році францисканський монах і математик Луче Паголі у своїх працях сформулював основні принципи, на яких засновано сучасний бухгалтерський облік. Найпростіші математичні моделі на рівні таблиць і формул використовували Ф. Кене в 1758 р. (економічні таблиці), А. Слітон (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі).

Постановка задачі. Нехай t – час, $x_i(t)$ (i = 1, 2) – обсяги виробничих потужностей двох конкуруючих об’єктів, кожен з яких нарощує свій обсяг виробництва. Перший об’єкт нарощує свій обсяг виробництва для того, щоб перемогти у конкурентній боротьбі другий об’єкт, а другий, знаючи про поведінку першого об’єкта, теж збільшує виробництво. Припускаючи, що загальний обсяг виробництва визначається:

- кількістю виробленої продукції кожною стороною $x_i(t)$ (i = 1, 2);
- заміною певного обладнання, що призводить до зменшення обсягу виробництва;
- ступенем недовіри конкурентів, який залежить лише від часу;
- типи приросту і зменшення обсягів виробництва пропорційно залежать від цих факторів.

Тоді математична модель набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2(t) + p_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2(t) + p_2(t), \end{cases}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(t)$, i,j = 1, 2, залежно від знаку, характеризують швидкості нарощування чи зносу (переоцінка) виробництва: p_i, i = 1, 2, – ступені недовіри конкурентів. Аналіз багатоточкової задачі анонсовано в [11].

Для однозначного визначення x_i, i = 1, 2 треба ще накласти локальну умову Коші або нелокальні, багатоточкові умови. Зауважимо також, що такою системою рівнянь можна описати модель гонки озброєнь між двома країнами [12]. Якщо виробничих потужностей є n

> 2, то дістаємо відповідну систему лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Виклад основного матеріалу. Сформулюємо і дослідимо локальну та нелокальну задачі для аналогічної системи $n > 2$ рівнянь.

Фундаментальна матриця системи рівнянь. Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)x_k(t), \; (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

де $p_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ – відомі функції (комплексні) дійсного аргумента t, неперервні в деякому інтервалі зміни t. Якщо ввести матриці $P(t) = ||P_{ik}(t)||$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ та $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то система (1) запишеться у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t). \qquad (2)$$

Інтегральною матрицею системи (1) називається квадратна матриця $X(t) = ||x_{ik}||$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, стовпці якої є n лінійно незалежними розв'язками системи.

Очевидно, що інтегральна матриця $X(t)$ задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(t)X(t). \qquad (3),$$

бо кожен стовпець матриці $X(t)$ задовольняє рівняння (1).

Теорема про існування і єдиність розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь гарантує, що інтегральна матриця $X(t)$ визначається однозначно, якщо додати значення $X(t_0) \equiv X_0$ цієї матриці при початковому значенні t_0 із області зміни t. Зокрема, коли $X(t_0) = E$, де E – одинична матриця, то тоді інтегральна матриця називається нормованою.

Нехай $|X(t)|$ – визначник матриці $X(t)$. Тоді з тотожності Якобі

$$|X(t)| = ce^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}P(t)dt},$$

де c – стала, $\mathrm{Sp}P = p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn}$ – слід матриці P, випливає, що $|X(t)| \neq 0$ при довільному значенні аргумента.

Основна теорема. Якщо $\tilde{X}(t)$ – невироджений частинний розв'язок ($|\tilde{X}(t)| \neq 0$) матричного рівняння (3), то його загальний розв'язок визначається формулою

$$X(t) = \tilde{X}(t)C, \qquad (4)$$

де C – довільна стала матриця.

Наслідок. Усі інтегральні матриці $X(t)$ системи (1) виражаються формулою (4) при $|C| \neq 0$.

Проблема полягає в тому, щоб побудувати частинний розв'язок системи (3). Спочатку розглянемо частинний випадок, коли $P(t) \neq A = \mathrm{const}$.

Розглянемо матричне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \qquad (5)$$

де A – стала матриця [13]. Тоді $\tilde{X}(t) = e^{At}$ є частинним невиродженим розв'язком рівнянням (5). Справді, почленно диференціюючи ряд $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$, отримуємо, що $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

Тоді загальним розв'язком рівняння (5) є, згідно з (4), матриця

$$X(t) = e^{At}c. \tag{6}$$

Задача Коші. Якщо для рівняння (5) записати умову Коші

$$X(t)\big|_{t=t_0} = X_0, \tag{7}$$

де X_0 – стала матриця, то розв'язок задачі Коші (5), (7) набуває вигляду

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0.$$

Нелокальна задача. Якщо замість умови (7) записати нелокальну умову

$$\mu X(t)\big|_{t=t_0} = X(t)\big|_{t=T} + X_0, \tag{8}$$

то отримаємо нелокальну задачу.

Нехай $|\mu e^{At_0} - e^{At}| \neq 0$. Тоді із загального розв'язку (6), використовуючи умову (8) отримаємо, що

$$\mu e^{At_0} c = e^{At} c + X_0, \; c = (\mu e^{At_0} - e^{At})^{-1} X_0$$

і розв'язок нелокальної задачі (5), (8) набуває вигляду

$$X(t) = e^{At} (\mu e^{At_0} - e^{AT})^{-1} X_0.$$

Зауваження. Нелокальну умову можна задавати у вигляді

$$\mu X(t)\big|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k X(t)\big|_{t=t_k} + X_0, \; t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m, \tag{9}$$

з обмеженнями

$$\left| \mu e^{At_0} - \sum_{k=1}^{n} \nu_k e^{At_k} \right| \neq 0.$$

Тоді розв'язок задачі (5), (9) є

$$X(t) = e^{At} \left(\mu e^{At_0} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k e^{At_k} \right) X_0.$$

Розв'язок нелокальної системи Коші. Нехай A – стала матриця. Для системи Коші

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{A}{t-a} X(t), \; t > a, \tag{10}$$

розглянемо нелокальну умову (9).

Заміною аргумента $u = \ln(t - a)$, $t > a$, даний випадок зводиться до попереднього і тому загальний розв'язок системи (10)

$$X(t) = e^{A \ln(t-a)} C = (t - a)^A C, \; t > a.$$

Розв'язок нелокальної задачі (9), (10) записується у вигляді

$$X(t) = (t-a)^A \Big((\mu(t_0 - a))^A - \sum_{k=1}^{m} (\nu_k (t_k - a))^A \Big)^{-1} X_0,$$

$$t_0 > a,\ t_1 > a,\ \ldots,\ t_m > a,\ \left| (\mu(t_0 - a))^A - \sum_{k=1}^{m} (\nu_k (t_k - a))^A \right| \neq 0.$$

Матрицант. Нормований розв'язок матричного рівняння (3) будується методом послідовних наближень $X_k(t)$ ($k = 0,1,2,\ldots$), вибираючи як наближення X_0 одиничну матрицю E. Якщо $X_k(t_0) = E$ ($k = 0,1,2,\ldots$), то

$$X_k(t) = E + \int_{t_0} P(t) X_{k-1}(t) dt, \quad (k = 1,2,\ldots)$$

є сумою перших $k+1$ членів матричного ряду

$$\Omega_{t_0}^t (P) \equiv E + \int_{t_0}^t P(t) dt + \int_{t_0}^t P(t) dt \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 + \ldots$$

Для доведення абсолютної і рівномірної збіжності ряду (11) будується збіжний мажорантний ряд, а почленним диференціюванням ряду (11) перевіряється, що він є розв'язком матричного рівняння (3). Тоді формулою

$$X(t) = \Omega_{t_0}^t (P) C,$$

де C – довільна стала матриця, визначається загальний розв'язок рівняння (3). Нормований розв'язок $\Omega_{t_0}^t (P) \equiv \Omega_{t_0}^t$ називається матрицантом.

Основна задача. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) x_k(t) + f_i(t) \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (12)$$

з неперервними коефіцієнтами $p_{ik}(t)$ ($i,k = 1,\ldots,n$) і неперервними неоднорідностями $f_i(t)$ ($i = 1,\ldots,n$) в області зміни аргумента t.

Якщо позначити $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$, $f = (f_1,\ldots,f_n)^T$, $P = \| p_{ik}(t) \|_1^n$, то загальний розв'язок системи (12) запишеться у вигляді

$$x(t) = \int_{t_0}^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau + \Omega_{t_0}^t (P) C, \qquad (13)$$

де C – сталий вектор-стовпець, $K(t,\tau) = \Omega_{t_0}^t (P) [\Omega_{t_0}^\tau (P)]^{-1}$ – матриця Коші. Для простоти розглянемо двоточкову нелокальну умову

$$\mu x(t) |_{t=t_0} = x(t) |_{t=T} + \varphi, \qquad (14)$$

де φ – сталий вектор-стовпець.

Підставивши (13) в (14), отримаємо, що

$$C=(\mu E-\Omega_{t_0}^{t}(P))^{-1}\{\int_{t_0}^{T}K(t,\tau)f(\tau)d\tau+\varphi\}.$$

Тоді

$$X(t)=\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)f(\tau)d\tau+\Omega_{t_0}^{t}(P)(\mu E-\Omega_{t_0}^{T}(P))^{-1}\{\int_{t_0}^{T}K(t,\tau)f(\tau)d\tau+\varphi\}. \quad (15)$$

Отже, вірною є така

Теорема. Розв'язок нелокальної задачі (12), (14) виражається формулою (15).

Зауваження. Аналогічно можна записати розв'язок рівняння (12) з багатоточковою умовою вигляду (9).

Економічне тлумачення багатоточкової умови полягає в тому, що обсяги виробництва в різні моменти часу регулюються цією запланованою умовою. Умова Коші задає обсяг виробництва лише в початковий момент часу.

Висновки. Побудована і досліджена модель економічної поведінки фірм, коли типи приросту і зміна обсягів виробництва у довільні моменти часу лінійно залежать від природніх факторів, зв'язаних з обсягом виробленої продукції кожною стороною, пропорційною зміною обсягу виробництва, зв'язаного із заміною виробничого обладнання і ступенем недовіри конкурентів. Формалізація моделі залежить від різних припущень – локальних заданих у початковий момент часу і нелокальних, що задаються у різні моменти часу (останні раніше не досліджувалися). Моделі можуть бути використані у режимі комп'ютерної імітації для експериментальних досліджень реальних процесів економічної взаємодії. Такі дослідження дають можливість виявити закономірності та особливості економічної динаміки, відтвореної створеними моделями.

Список використаних джерел:

1. Колемаев В. А. Математическая экономика : Учебник для вузов / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
2. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе : Учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.
3. Сидорчук Н. Г. Математичне моделювання як основа побудови системи професійно-педагогічної підготовки студентів університетів у контексті євроінтеграційних процесів / Н. Г. Сидорчук // Вісник Житомирського державного університету. – 2010. – Вип. 49. – С. 41– 46.
4. Морозов К. Е. Математическое моделирование в научном познании / К. Е. Морозов. – М.: Мысль, 1969. – 215 с.
5. Самарский А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматгиз, 2001. – 316 с.
6. Ляшенко О. Особливості методології економіко-математичного моделювання трансферу технології / О. Ляшенко // Галицький економічний вісник. – 2010. – № 3 (28). – С. 26 – 34.
7. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : Навч. посібник / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
8. Станжицький О. М. Основи математичного моделювання : Навч. посібник / О. М. Станжицький, Є. Ю. Таран., Л. Д. Городинський. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 96 с.
9. Томашевський В. М. Моделювання систем / В. М. Томашевський. – К.: Видавнича група BHV, 2005. – 352 с.
10. Григорків В. С. Моделювання економіки : навч. посібник / В. С. Григорків. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – 320 с.
11. Дрінь І. І. Побудова і дослідження моделі економічної поведінки фірм / І. І. Дрінь // Nowoczena nauka: teoria I practica: Mater. II Miedz. konf. Nauk-Pract / Pod red. S. Gorniaka. – Katowice: Nowa nauka, 2018. – С. 75 – 77.
12. Маценко В. Г. Математичне моделювання : навч. посібник / В. Г. Маценко. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2014. – 519 с.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
14. Герасимов Б. И. Дифференциальные динамические модели: учебное пособие / Б. И. Герасимов, Н. Н. Пучков, В. Н. Протасов. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГГУ, 2010. – 80 с.

Iryna Drin, PhD, Associate Professor,
Chernivtsi Institute of Trade and EconomicS of KNUTE,
Chernivtsi,
Svitlana Drin, PhD,
National University of Kyiv-Mohyla Academy

MATHEMATICAL MODEL OF GLOBAL ECONOMIC PROCESS UNDER NONLOCAL CONDITIONs

Summary

The essence of dynamic economic behavior of competing economic entities, which simulated nonlocal problem for systems of differential equations with variable coefficients is revealed. Developed a dynamic mathematical model assuming that total production is determined by the following factors: the number of products each side, changing certain equipment, which leads to changes in output, the degree of distrust of competitors, and assuming that the rate of change in output proportional to these factors . A partial case of such a model is the model of the arms race. The economic interpretation of nonlocal conditions is that the production volumes at different times governed by predetermined condition. A mathematical model designed to study the dynamics of the economic process of adjusting production volumes at different times.

Keywords: model, dynamics, competing economic objects, volume of production, nonlocal condition of regulation.

References:

1. Kolemaev, V.A. (1984). *Matematicheskaja jekonomika* [Mathematical economic], UNITI, Moskva (in Russ.).
2. Shelobaev, S.I. (2000). *Matematicheskie metody i modeli v jekonomike, finansah i biznese* [Mathematical methods and models in economics, finance and business], UNITI-DANA, Moskva (in Russ.).
3. Sydorchuk, N.G. (2010). Mathematical modeling as the basis for building a system of vocational and pedagogical preparation of university students in the context of European integration processes. *Visnyk Zhytomyrs'kogo derzhavnogo universytetu [Bulletin of the Zhytomyr State University],* vol. 49, pp. 41–46 (in Ukr.).
4. Morozov, K.E. (1969). *Matematicheskoe modelirovanie v nauchnom poznanii* [Mathematical modeling in scientific knowledge]. Mysl', Moskva (in Russ.).
5. Samarskii, A.A., Muchailov, A.P. (2001). *Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery* [Mathematical modeling. Ideas. Methods. Examples]. Fizmatgiz, Moskva (in Russ.).
6. Liashenko, O. (2010). Features of the methodology of economic-mathematical modeling of technology transfer. *Halytskii ekonomichnii visnyk [Galician Economic Journal],* part 3, vol. 28, pp. 26–34 (in Ukr.).
7. Ljashenko, O. (2006). *Osnovy matematychnogo modelyuvannya ekonomichnyh, ekolohichnyh ta socialnyh processiv* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Economic, Ecological and Social Processes], Navchal'na knyga, Ternopil' (in Ukr.).
8. Stanzhytskii, O.M., Taran, E.Yu., Hordynskii, L.D. (2006). *Osnovy matematychnogo modelyuvannya* [Fundamentals of Mathematical Modeling], Kyiv National University, Kyiv (in Ukr.).
9. Tomashevskii, V.M. (2009). *Modeliuvannia system* [Modeling of Systems], BHV, Kyiv (in Ukr.).
10. Hryhorkiv, V.S. (2009). *Modelliuvannia ekonomiky* [Modeling of Economics], ChNU, Chernivtsi (in Ukr.).
11. Drin, I.I. (2018). Construction and research of the model of economic behavior of firms. *Nowoczena nauka: teoria I practica. Mater. II Miedz. konf. Nauk-Pract.* Nowa nauka, Katowice, pp. 75–77 (in Ukr.).
12. Matsenko, V.G. (1988). *Matematychne modelliuvannia* [Mathematical Modeling], ChNU, Chernivtsi (in Ukr.).
13. Gantmaher, F.R. (1988). *Teoriia matryts* [Matrix Theory], Nauka, Moskva (in Russ.).
14. Gerasimov, B.I. (2010). *Differentsial'nye dinamicheskie modeli* [Differential dynamic models], Tambov (in Russ.).