

9. Andreeva, E.A., Kolmanovskij, E.B., Shajhet, L.U. (1992). *Upravlenie sistemami s posledejstviem* [Aftereffect system management], Nauka, Moscow, 336 p. (in Russ.).
10. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2015). Stochastic model of optimal single-product growth economy with nonlinear environmental-economic criteria with Wiener and Poisson processes. *Problemy upravlenija i informatiki* [Problems of controls and informatics], vol. 3, pp. 136-148.
11. Skorokhod, A. V. (1990). *Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv* [Lectures on the theory of random processes], Lybid, Kyiv, 168 p.
12. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2012). *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsykladu odnoproductovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Simulation and optimization of the complete cycle of one-product macroeconomics growth taking into account the ecological factor], Misto, Chernivtsi, 208 p. (in Ukr.).
13. Yasyns'kyj, V. K. (2005). *Osnovy obchysliuval'nykh metodiv* [Fundamentals of computing methods], Zoloti lytavry, Chernivtsi, 396 p. (in Ukr.).
14. Bejko, I.V., Bublik, B.E., Zin'ko, P.N. (1983). *Metody i algoritmy reshenija zadach optimizacii* [Methods and algorithms for optimization problems solving], Vyscha shkola, Kyiv, 512 p. (in Russ.).
15. Nikitin, N.N., Razevich, V.D. (1978). Digital simulation methods for stochastic differential equations and estimation of their error. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], vol. 18, pp. 106-117 (in Russ.).
16. Akulich, I.L. (1986). *Matematicheskoe programmirovanie v primerah i zadachah* [Mathematical programming in examples and problems], Vysshaja shkola, Moscow, 319 p. (in Ukr.).
17. Bohaienko, I.M., Hryhorkiv, V.S., Bojchuk, M.V., Riumshyn, M.O. (1996). *Matematychni prohramuvannia* [Mathematical programming], Lohos, Kyiv, 266 p. (in Ukr.).
18. Magnus, Ja.R., Katyshev, P.K., Pereseckij, A.A. (1998). *Jekonometrika* [Econometrics], 2nd ed., Delo, Moscow, 248 p. (in Russ.).



УДК 519.866:332.7

О.Ю. Вінничук, к.е.н., доцент,
Л.В. Скращук, к.е.н., асистент,

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО РОСТУ В УМОВАХ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОЇ РІВНОВАГИ

Анотація

Побудовано нелінійну модель економічного росту екологічно збалансованої економіки з використанням гіпотез щодо побудови моделей економічного росту рамсеївського типу, доповнених гіпотезами про те, що інвестиції обов'язково розподіляються як у матеріальне виробництво, так і у допоміжне виробництво, та вважаючи, що вони повністю витрачаються на приріст відповідного капіталу і його амортизації, а ступінь забрудненості з часом спадає відповідно до експоненціальної функції. Запропонована в цій праці модель оптимального економічного росту в умовах екологічної рівноваги дозволяє вивчити оптимальні траєкторії економічного росту екологічно збалансованої економіки. Модель математично досліджено за допомогою так званих достатніх умов оптимальності та обґрунтовано структуру їх оптимальних розв'язків. Отримані у результаті експериментальних досліджень з моделлю рекомендації можуть бути корисними як для подальших теоретичних досліджень, так і для прийняття практичних рішень в економіці.

Ключові слова: економічний ріст, еколого-економічна рівновага, модель оптимального керування, оптимальний процес, оптимальні траєкторії.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА В УСЛОВИЯХ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Аннотация

Построено нелинейную модель экономического роста экологически сбалансированной экономики с использованием гипотез относительно построения моделей экономического роста рамсеевского типа, дополненных гипотезами о том, что инвестиции обязательно распределяются как в материальное производство, так и во вспомогательное производство, и считая, что они полностью расходуются на прирост соответствующего капитала и его амортизации, а степень загрязненности со временем приходит в соответствии с экспоненциальной функцией. Предложенная в этой работе модель оптимального экономического роста в условиях экологического равновесия позволяет изучить оптимальные траектории экономического роста экологически сбалансированной экономики. Модель математически исследована с помощью так называемых достаточных условий оптимальности и обоснована структура их оптимальных решений. Полученные в результате экспериментальных исследований с моделью рекомендации могут быть полезными как для дальнейших теоретических исследований, так и для принятия практических решений в экономике.

Ключевые слова: экономический рост, эколого-экономическое равновесие, модель оптимального управления, оптимальный процесс, оптимальные траектории.

Постановка проблеми. Різке погіршення навколишнього середовища, виснаження природних ресурсів, порушення еколого-економічної рівноваги є тими загрозами, які спонукають країни світу до розробки та впровадження інструментів екологічного регулювання економічного розвитку. Не винятком є і наша держава, оскільки екологічна ситуація в Україні суттєво впливає на економічне зростання країни та якість життя її громадян. Актуальною визнано проблему переходу до сталого розвитку, для практичної реалізації якої системно формуються засади довготривалого економічного зростання в умовах еколого-економічної рівноваги. При цьому, взаємодія природного середовища і людського фактора розглядається в межах єдиної еколого-економічної системи й об'єднує економічні, природні і соціальні процеси, що взаємопов'язані між собою. Вирішення зазначених викликів неможливе без застосування економіко-математичного моделювання, оскільки лише за допомогою даного методу можна будувати адекватні еколого-економічні моделі, які стануть основою для прийняття оптимальних управлінських рішень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Науковий інтерес до проблем економічного зростання особливо посилився у ХХ ст. Протягом останніх десятиліть метою економічної політики будь-якої країни є стимулювання економічного зростання, підтримка його темпів на стабільному та оптимальному рівні. Але в останні роки виникли серйозні сумніви щодо бажаності економічного росту для країн, що вже досягли добробуту. В основі цих сумнівів лежить низка взаємозалежних аргументів проти стрімкого економічного зростання. Враховуючи це та екологічну ситуацію світу, можна стверджувати, що забезпечення економічного росту будь-якої країни має базуватися на засадах сталого розвитку, коли балансуються потреби людства і можливості природи,

узгоджується розгляд проблем стану навколишнього середовища існування і його соціально-економічного розвитку.

Тому взаємодія людського суспільства та природного середовища на будь-якому рівні повинна розглядатися в рамках єдиної еколого-економічної системи, що об'єднує взаємопов'язані соціальні, економічні та природні процеси. Існує величезна кількість публікацій з проблем економічного розвитку та аналізу екологічної стійкості [1-6]. Зокрема, Хала Абу-Алі, Ясмін М. Абдельфатта досліджували побудову загального індексу сталого розвитку та вивчення взаємозв'язку між наявністю природних ресурсів, економічним зростанням та навколишнім середовищем [1]. Ахмет Атиль Асічі досліджував зв'язок між економічним зростанням та тиском на природу з точки зору перспективної економічної стійкості [2]. Роберт Д. Кернс і Вінсент Марінет досліджують зв'язки між поточним споживанням та поліпшенням стабільності [3].

У праці «Економічне зростання, індустріалізація і навколишнє середовище» описано композиційний перехід від сільськогосподарського виробництва до промислового, тобто до індустріалізації, що є центральним фактором змін у якості навколишнього середовища. Такий перехід вивчено за допомогою двосекторної моделі неокласичного зростання [4].

Хі-юань Шіх, Джи Хва Чен, Шухуа Чанг, Чінгонг Лай побудували та дослідили модель ендегенного росту для вивчення зв'язку між екологічною усвідомленістю та економічним зростанням [5].

У статті «Навколишнє середовище, енергетика та стійке економічне зростання» автори розробили модель ендегенного економічного зростання та описали оптимальний шлях сталого економічного зростання з обмеженнями енергії та навколишнього середовища [6].

Всі результати показують взаємозв'язок між економічним зростанням, екологією та сталим розвитком. Тим не менше, складність та різноманітність еколого-економічних систем та сталого розвитку потребують подальшого дослідження з метою побудови нових методів.

Формування цілей статті й аргументування актуальності поставленого завдання. Незважаючи на високий рівень і міждисциплінарний характер існуючих теоретичних розробок, теорія, методологія і практика забезпечення оптимального економічного росту на основі концепції сталого розвитку, проблеми дослідження існуючих моделей та розробки нових економіко-математичних підходів і методик аналізу екологічно збалансованої економіки, зокрема її динаміки, залишаються актуальними.

Модель економічного росту за своєю сутністю та можливостями застосування ще повністю не використана і може бути корисною при вивченні багатьох об'єктів сучасної економічної науки. До таких об'єктів належать, наприклад, еколого-економічні системи та процеси сталого розвитку. Метою даного дослідження є побудова нелінійної моделі економічного росту екологічно збалансованої економіки з використанням гіпотез щодо побудови моделей економічного росту рамсеївського типу, доповнених гіпотезами про те, що інвестиції обов'язково розподіляються як у

матеріальне виробництво, так і у допоміжне виробництво, та вважаючи, що вони повністю витрачаються на приріст відповідного капіталу і його амортизації, а ступінь забрудненості з часом спадає відповідно до експоненціальної функції.

Виклад основного матеріалу. Нехай економіка складається з основного (матеріального) та допоміжного виробництв. Допоміжне виробництво знищує забруднювачів, які утворилися при функціонуванні основного виробництва. Основне виробництво пов'язане з випуском продукції, при якому виникає забруднення, а допоміжне виробництво (очисні споруди), пов'язане лише із знищенням забруднювачів.

Динаміку такої економіки опишемо величинами: t – змінна часу (час неперервний), $W(t)$ – виробниче споживання (та частина валового випуску, що повертається назад у виробництво), $X(t)$ – валовий випуск, $Y(t)$ – кінцевий випуск, $C(t)$ – невиробниче споживання, $I(t)$ – інвестиції (капіталовкладення), $I_b(t)$ – інвестиції в основне (матеріальне) виробництво, $I_p(t)$ – інвестиції в допоміжне виробництво (очисні споруди), $K_b(t)$ – капітал основного виробництва, $K_p(t)$ – капітал допоміжного виробництва, $L(t)$ – трудові ресурси, $P(t)$ – забруднення (наприклад, обсяг забруднюючих речовин у навколишньому середовищі в момент часу t), $A_b(t)$ – амортизаційні відрахування капіталу, задіяного в матеріальному виробництві, $A_p(t)$ – амортизаційні відрахування капіталу, задіяного в допоміжному виробництві.

Для побудови моделі економічного росту екологічно збалансованої економіки виділимо наступні основні припущення:

– витрати виробничого споживання прямо пропорційні величині валового випуску з коефіцієнтом ω ($0 < \omega < 1$):

$$W(t) = \omega X(t); \quad (1)$$

– валовий випуск визначається за допомогою неокласичної виробничої функції, яка двічі неперервно диференційовна і лінійно однорідна:

$$X(t) = F(K_b(t), L(t)); \quad (2)$$

– трудові ресурси є екзогенною змінною зі сталим темпом зростання $n = const$:

$$L(t) = L_0 e^{nt}; \quad (3)$$

– інвестиції розподіляються в основне та допоміжне виробництва:

$$I(t) = I_b(t) + I_p(t); \quad (4)$$

– інвестиції у матеріальне виробництво та допоміжне виробництво повністю

витрачаються на приріст та амортизацію відповідного капіталу:

$$I_b(t) = \dot{K}_b(t) + A_b(t), \quad (5)$$

$$I_p(t) = \dot{K}_p(t) + A_p(t); \quad (6)$$

– амортизаційні відрахування прямо пропорційні величині відповідного капіталу в кожний момент часу:

$$A_b(t) = \mu_b K_b(t), \quad (7)$$

$$A_p(t) = \mu_p K_p(t), \quad (8)$$

де μ_b, μ_p – коефіцієнти (норми) амортизації ($\mu_b, \mu_p \in (0,1)$);

– критерієм розвитку економіки на вибраному відрізку часу $[0, T]$ є максимізація інтегрального невиробничого споживання

$$F = \int_0^T e^{-\sigma t} C(t) dt, \quad (9)$$

де $\sigma = const > 0$.

Аналіз динаміки ступеня забрудненості, зокрема викидів усіх парникових газів у еквіваленті викидів вуглекислого газу в атмосферу [7], дозволяє припустити, що економіка (як об'єкт, система) перебуває у стані, коли ступінь забрудненості з часом експоненціально спадає:

$$P(t) = q_0 e^{-\nu t}. \quad (10)$$

Екологічна рівновага (10) формалізується в такому вигляді:

$$l(X(t)) - r(K_p(t)) = q(P(t)) = q_0 e^{-\nu t}, \quad (11)$$

де $l(X(t)), r(K_p(t)), q(P(t))$ – відповідно функції виробничого, знищеного та самоочищеного забруднення. Крім того, припустимо, що функції $l(X(t))$ і $r(K_p(t))$ є лінійними, тобто

$$l(X(t)) = l_0 + l_1 X(t), \quad (12)$$

$$r(K_p(t)) = r_0 + r_1 K_p(t), \quad (13)$$

де константи l_0, r_0, l_1, r_1, q_0 відіграють значну роль при реалізації оцінки впливу екологічного фактора на розвиток економіки. Підставивши (12) і (13) в (11), отримаємо співвідношення

$$l_1 X(t) - r_1 K_p(t) = \varepsilon_0 + q_0 e^{-vt}, \quad (14)$$

де $\varepsilon_0 = r_0 - l_0$ (l_0 і r_0 – забруднення і очищення в умовах відсутності економічної діяльності відповідно, q_0 – самоочищення природи).

Задача побудови моделі економічного росту в умовах екологічної рівноваги (14) зводиться до побудови рівняння динаміки капіталу, задіяного в основному виробництві $K_b(t)$. Для побудови моделі перейдемо до питомих показників

$$k = \frac{K_b}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad x = \frac{X}{L} = F(k, 1) = f(k), \quad F(K_b, L) = Lf(k).$$

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial K_b} = f'(k), \quad \frac{\partial F}{\partial L} = f(k) - kf'(k),$$

$$f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k \rightarrow +0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

У ролі керуючого параметра (керування) візьмемо частку невиробничого споживання в кінцевому випуску, тобто величину $u = \frac{C}{Y}$ ($0 \leq u \leq 1$).

Задамо початковий і кінцевий стан для фондоозброєності $k(t)$ при $t=0$ і $t=T$ (горизонт планування T будемо вважати скінченним і достатньо великим). Використовуючи для питомого споживання критерій (9), отримуємо модель оптимального економічного росту в умовах екологічної рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e^{-\sigma t} u(t) (1 - \omega) f(k) dt \text{ а } \max \\ k \dot{=} \varphi(t, k(t)), \\ k(0) = k^{(0)}, k(T) \geq k^{(T)}, \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \end{array} \right. \quad (15)$$

де $k^{(0)}$ і $k^{(T)}$ – додатні величини,

$$k \dot{=} \varphi(t, k) = \left\{ \left[(1 - u(t))(1 - \omega) - \frac{l_1}{r_1} (\mu_p + n) \right] f(k) - (\mu_b + n)k + (\mu_p - v) \frac{q_0}{r_1} e^{-vt} + \frac{\mu_p \varepsilon_0 e^{-nt}}{r_1 L_0} \right\} \cdot \left(1 + \frac{l_1}{r_1} f'(k) \right)^{-1} - \text{рівняння динаміки виробничого капіталу.}$$

Модель (15) у математичному плані є задачею оптимального керування, зміст якої полягає в тому, щоб побудувати процес

$$\Pi^*(t) = (u^*(t), k^*(t)), \quad t \in [0, T],$$

який є допустимим і максимізує функціонал (9), де u – керування, k – фазова змінна.

Дослідження (15) здійснено за допомогою достатніх умов оптимальності [8, 9, 10]. Нехай допустимий процес $\Pi^*(t) = (u^*(t), k^*(t))$, $t \in [0, T]$ належить множині всіх допустимих процесів $\Pi = (u, k)$ при $t \in [0, T]$, тобто належить $M^{(T)} = \{k(t) | k(t) \geq k^{(T)}\}$ і деяка функція $\psi(t, k)$ задовольняє умови:

$$1) \text{ при кожному } t \in [0, T]: R(t, k^*, u^*) = \max_{(k, u) \in M^{(t)}} R(t, k, u);$$

$$2) \Phi(k^*(T)) = \min_{k \in M^{(T)}} \Phi(k) \quad (M^{(T)} - \text{множина допустимих кінцевих станів}$$

фондоозброєності).

Тоді процес $\Pi^*(t) = (u^*(t), k^*(t))$ є оптимальним.

Висновки приведеного дослідження сформульовані в наступному твердженні.

Твердження. Нехай для моделі (15) виконуються умови:

1) виробнича функція $f(k)$ є неокласичною, тобто двічі неперервно диференційовною і такою, що

$$f'(k) > 0, f''(k) < 0, \lim_{k \rightarrow +0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0;$$

$$2) (1 - \omega) - \frac{l_1}{r_1} (\mu_p + n + \sigma) > 0, \text{ причому константи } \omega, \mu_p \in (0, 1); l_1, r_1, n, \sigma -$$

додатні,

3) $u_0 \geq 0, u_0 + u_1 + u_2 \leq 1$, де

$$u_0 = 1 - \frac{l_1(\mu_p + n)}{r_1(1 - \omega)} - \frac{(\mu_b + n)k^0}{(1 - \omega)f(k^0)},$$

$$u_1 = \frac{\mu_p \varepsilon_0}{r_1 L_0 (1 - \omega) f(k^0)},$$

$$u_2 = \frac{1}{(1 - \omega) f(k^0)} \left((\mu_p - \nu) \frac{q_0}{r_1} \right),$$

($\mu_b \in (0, 1)$, $\varepsilon_0 = q_0 - l_0 + r_0$, $\varepsilon_0, L_0, q_0, l_0, r_0$ – додатні константи), а $\tilde{k} = const$ – розв'язок рівняння

$$\left[(1 - \omega) - \frac{l_1}{r_1} (\mu_p + n + \sigma) \right] f'(k) = \mu_b + n + \sigma;$$

4) розглядаються випадки економічного росту від початкового $k^{(0)}$ до кінцевого

стану $k^{(T)}$ ($k^{(T)} > k^{(0)}$):

$$0 < k^{(0)} < \tilde{k} < k^{(T)}, \quad 0 < k^{(0)} < \tilde{k} = k^{(T)},$$

$$0 < \tilde{k} < k^{(0)} < k^{(T)}, \quad 0 < \tilde{k} = k^{(0)} < k^{(T)};$$

5) $0 < \max(\tilde{k}, k^{(T)}) < \hat{k}$, де \hat{k} – корінь рівняння

$$\left[(1 - \omega) - \frac{l_1}{r_1} (\mu_p + n) \right] \frac{f(k)}{k} - (\mu_b + n) = 0;$$

6) $\bar{k} = \min(\tilde{k}, k^{(0)})$,

$$\frac{\mu_p \varepsilon_0}{r_1 L_0} + (\mu_p - \nu) \frac{q_0}{r_1} < \frac{l_1}{r_1} (\mu_p + n) f(\bar{k}) + (\mu_b + n) \bar{k};$$

7) досліджувальний проміжок часу $[0, T]$ є достатньо великим, тобто таким, що сумарний час проходження по граничних траєкторіях $k_\Lambda(t)$ і $k_\Pi(t)$ є меншим від T .

Тоді для моделі (15) існує оптимальний процес $\Pi^*(t) = (u^*(t), k^*(t))$, $t \in [0, T]$, який описується формулами

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ або } 1, & \text{якщо } 0 \leq t < \tau^*, \\ u(t) = u_0 + u_1 e^{-nt} + u_2 e^{-\nu t}, & \text{якщо } \tau^* \leq t < \tau^{**}, \\ 0 \text{ або } 1, & \text{якщо } \tau^{**} \leq t \leq T, \end{cases} \quad (16)$$

$$k^*(t) = \begin{cases} k_\Lambda(t), & \text{якщо } 0 \leq t < \tau^*, \\ \tilde{k}, & \text{якщо } \tau^* \leq t < \tau^{**}, \\ k_\Pi(t), & \text{якщо } \tau^{**} \leq t \leq T \end{cases} \quad (17)$$

і для якого період $(\tau^{**} - \tau^*)$ проходження через магістраль є додатним, максимальним серед усіх допустимих і таким, що $\tau^{**} - \tau^* < T$ ($k_\Lambda(\tau^*) = \tilde{k}$, $k_\Pi(\tau^{**}) = \tilde{k}$). Крім того, відповідні граничні траєкторії є розв'язками задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = \varphi(t, k(t)), \\ k(\bar{t}) = \bar{k}, \end{cases} \quad (18)$$

($k_\Lambda(t)$ при $\bar{t} = 0$, $\bar{k} = k^{(0)}$, а $k_\Pi(t)$ при $\bar{t} = T$, $\bar{k} = k^{(T)}$), зростають при $u(t) \equiv 0$ та спадають при $u(t) \equiv 1$, а при $\tilde{k} = k^{(0)}$ або $\tilde{k} = k^{(T)}$ збігаються з магістраллю $k(t) \equiv \tilde{k}$.

Описаний вище твердження задає порядок обчислень границь проміжків часу $[t_0, \tau^*]$, $[\tau^*, \tau^{**}]$, $[\tau^{**}, T]$, протягом яких необхідно вибирати три різні величини керування, що приведе до оптимального переходу керованої системи з початкового стану в кінцевий. Для практичного використання цього твердження необхідно визначити моменти часу зміни обсягів фондоозброєності τ^* , τ^{**} і, вибираючи величину керування згідно п. 3) отримати оптимальний процес.

З економічного погляду, суть цього оптимального керування еколого-економічної динаміки полягає у плануванні частки невиробничих витрат у вартості одиниці кінцевого випуску.

Для експериментального дослідження побудованої моделі та алгоритму пошуку оптимального процесу керування економічної динаміки в умовах екологічної рівноваги (10) розроблено програмне забезпечення мовою Matlab. Здійснено кілька імітаційних експериментів побудови оптимальних траєкторій. Програмне забезпечення дозволяє аналізувати можливі сценарії розвитку еколого-економічних систем залежно від вибраної мети, а також здійснювати підбір оптимальних параметрів моделі, які впливають на збалансованість бажаного стану еколого-економічних систем. Створена система комп'ютерного моніторингу може бути використана як інструмент підтримки прийняття рішень і є основою для створення комплексу засобів дослідження еколого-економічних явищ, зокрема під час проектування бізнес-планів виробничих підприємств при плануванні частки невиробничих витрат у вартості одиниці кінцевого випуску, зокрема в умовах екологічної рівноваги, при розробці сценаріїв заходів державного еколого-економічного регулювання тощо.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Запропонована в цій праці модель оптимального економічного росту в умовах екологічної рівноваги дозволяє вивчити оптимальні траєкторії економічного росту екологічно збалансованої економіки. Модель математично досліджено за допомогою так званих достатніх умов оптимальності та обґрунтовано структуру їх оптимальних розв'язків. Отримані у результаті експериментальних досліджень з моделлю рекомендації можуть бути корисними як для подальших теоретичних досліджень, так і для прийняття практичних рішень в економіці.

Список використаних джерел:

1. Abou-Ali, H., Abdelfattah, Y.M. (2013) Integrated paradigm for sustainable development: A panel study. *Economic Modeling*, vol. 30, pp. 334–342.
2. Asici, A.A. (2013). Economic growth and its impact on environment: A panel data analysis, *Ecological Indicators*, vol. 24, pp. 324-333.
3. Cairns, R.D., Martinet, V. (2014). An environmental-economic measure of sustainable development. *European Economic Review*, vol. 69, pp. 4–17.
4. Cherniwchan, J. (2012). Economic growth, industrialization, and the environment. *Resource and Energy Economics*, vol. 34, pp. 442–467.
5. Shieh, J-Y and Chen, J-H and Chang, S-H and Lai, C-C (2014). Environmental consciousness, economic growth, and macroeconomic instability. *International Review of Economics and Finance*, vol. 34, pp. 151–160.
6. Zuo, H. and Ai, D. (2011). Environment, energy and sustainable economic growth. *Procedia Engineering*, vol. 21, pp. 513–519.

7. CO₂ emissions (metric tons per capita). Available at: <https://data.worldbank.org/indicator/EN.ATM.CO2E.PC?view=chart>

8. Основы теории оптимального управления / [Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др.] ; под ред. В. Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 430 с.

9. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці : навч. посібник / В. С. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 200 с.

10. Бойчук М. В. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук. – Чернівці : Місто, 2012. – 208 с.

Olena Vinnychuk, PhD, Associate Professor
Larysa Skrashchuk, PhD, Assistant of the Department
 Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
 Chernivtsi

OPTIMAL ECONOMIC GROWTH MODELING UNDER THE CONDITIONS OF ECO-ECONOMIC BALANCE

Summary

A nonlinear model of the economic growth of an environmentally balanced economy was constructed using the hypothesis concerning the construction of economic growth models of Ramsey type, supplemented by the hypothesis about the necessity of investments that need to be distributed both in material and auxiliary production and taking into consideration that they are fully spent on the growth of the corresponding capital and its depreciation and with time the degree of pollution decreases according to the exponential function. model of optimal economic growth in ecological equilibrium conditions which allows us to study the optimal trajectories of the economic growth of an environmentally balanced economy has been offered. The model is mathematically investigated with the help of so-called sufficient optimality conditions and the structure of their optimal solutions is substantiated. The final results of experimental research with the model of recommendation can be useful both for further theoretical studies and for making practical decisions in the economy.

Key words: economic growth, eco-economic equilibrium, model of optimal control, optimal process, optimal trajectories.

References:

1. Abou-Ali, H., Abdelfattah, Y.M. (2013). Integrated paradigm for sustainable development: A panel study. *Economic Modeling*, vol. 30, pp. 334–342.

2. Asici, A.A. (2013). Economic growth and its impact on environment: A panel data analysis. *Ecological Indicators*, vol. 24, pp. 324–333.

3. Cairns, R.D., Martinet, V. (2014). An environmental-economic measure of sustainable development. *European Economic Review*, vol. 69, pp. 4–17.

4. Shieh, J-Y., Chen, J-H., Chang, S-H., Lai, C-C. (2014). Environmental consciousness, economic growth, and macroeconomic instability. *International Review of Economics and Finance*, vol. 34, pp. 151–160.

5. Cherniwchan, J. (2012). Economic growth, industrialization, and the environment. *Resource and Energy Economics*, vol. 34, pp. 442–467.

6. Zuo, H., Ai, D. (2011). Environment, energy and sustainable economic growth. *Procedia Engineering*, vol. 21, pp. 513–519.

7. CO₂ emissions (metric tons per capita). Available at: <https://data.worldbank.org/indicator/EN.ATM.CO2E.PC?view=chart> (Accessed 01 November 2018).

8. Krotov, V.F., Lagosha, B.A., Lobanov, S.M. (1990). *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya* [Foundations of Optimal Control Theory]. Vysshaja shkola, Moscow, 430 p. (in Russ.).

9. Grygorkiv, V.S. (2011). *Optymal'ne keruvannia v ekonomitsi* [Optimal control of the economy]. Chernivtsi National University, Chernivtsi, 200 p. (in Ukr.).

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

10. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2012). *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsyклу odnoproductovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Simulation and optimization of the complete cycle of one-product macroeconomics growth taking into account the ecological factor]. Misto, Chernivtsi, 208 p. (in Ukr.).

